10) Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία πραγματικών $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία θετικών αριθμών ώστε να ισχύει $\varepsilon_n \to 0$ και $|a_{n+k}-a_n|<\varepsilon_n$ για κάθε $n,k\in\mathbb{N}$. Δείξτε ότι η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα.

Λύση

Έστω $\varepsilon>0$.

Εφόσον $\varepsilon_n\to 0$ $\exists n_0\in\mathbb{N}$ ώστε $\varepsilon_n<\varepsilon$, $\forall n\geq n_0$.

Θεωρούμε τυχαία $m,n\in\mathbb{N}$ με $m,n\geq n_0$

α) Αν $m=n$: $|a_m-a_n|=0<\varepsilon$

β) Αν $m>n$ τότε $m=n+k$ όπου $k=m-n$

Έτσι, $|a_m-a_n|=|a_{n+k}-a_n|<\varepsilon_n<\varepsilon$

γ) Αν $n>m$ ομοίως με το β).

Συνεπώς, η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική, άρα συγκλίνουσα.

11) Δίνεται μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $0<a<1$ ώστε $|x_{n+1}-x_n|\leq a^n$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Δείξτε ότι η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy.

Λύση:

Για κάθε $n,k\in\mathbb{N}$: $|x_{n+k}-x_n|=|(x_{n+k}-x_{n+k-1})+(x_{n+k-1}-x_{n+k-2})+\dots+(x_{n+k-k+1}-x_n)|$

$$\leq |x_{n+k}-x_{n+k-1}|+|x_{n+k-1}-x_{n+k-2}|+\dots+|x_{n+1}-x_n|\leq$$

$$\leq a^{n+k-1}+a^{n+k-2}+\dots+a^{n+1}+a^n=a^n(1+a+a^2+\dots+a^{k-1})=$$

$$=a^n\cdot\frac{a^k-1}{a-1}=a^n\cdot\frac{1-a^k}{1-a}<a^n\cdot\frac{1}{1-a}$$

Συνεπώς, από προηγούμενη άσκηση, η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ βασική ακολουθία, άρα συγκλίνει.

Θεώρημα: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής, τότε η f φραγμένη.

Θεώρημα: Αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής, τότε η f λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

[δηλαδή $\exists x_0,y_0\in[a,b]$ ώστε $f(x_0)\leq f(t)\leq f(y_0)$, $\forall t\in[a,b]$]

Απόδειξη:

Δείχνουμε ότι η f παίρνει μέγιστη τιμή.

α' απόδειξη: Εφόσον η f φραγμένη

Το σύνολο $A=\{f(x), x\in[a,b]\}$

$A\neq\emptyset$ και άνω φραγμένο άρα έχει supremum

Θέτω $M=\sup A$

Υποθέτουμε (προς απαγωγή σε άτοπο) ότι η f δε λαμβάνει μέγιστη τιμή.

Τότε $f(x)<M \quad \forall x\in[a,b]$

Ορίζουμε $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ με $g(x)=\dfrac{1}{M-f(x)}$

Η g είναι καλά ορισμένη ($M-f(x)>0 \ \forall x\in[a,b]$),

συνεχής ως πηλίκο συνεχών και $g(x)\geq 0 \ \forall x\in[a,b]$.

Από το προηγούμενο θεώρημα η g είναι φραγμένη οπότε $\exists\, \theta>0$ ώστε

$$g(x)\leq\theta,\ \forall x\in[a,b] \Rightarrow \frac{1}{M-f(x)}\leq\theta,\ \forall x\in[a,b] \Rightarrow M-f(x)\geq\frac{1}{\theta},\ \forall x\in[a,b] \Rightarrow$$

$\Rightarrow f(x)\leq M-\dfrac{1}{\theta},\ \forall x\in[a,b]$. Άτοπο, καθώς το M είναι supremum και

$M-\dfrac{1}{\theta}<M$ και άνω φράγμα του A μικρότερο του ελαχίστου άνω φράγματος.

β' απόδειξη (με ακολουθίες)

Θέτω $M=\sup\{f(x), x\in[a,b]\}$

Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ επιλέγω $x_n\in[a,b]: f(x_n)>M-\dfrac{1}{n}$

Η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη ακολουθία, άρα από θεώρημα Bolzano-Weierstrass έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

Έστω (x_{k_n}) με $x_{k_n}\to\xi$ τότε $\xi\in[a,b]$

$$\left(\begin{array}{l} x_{k_n}\geq a \ \forall n \Rightarrow \xi\geq a \\ x_{k_n}\leq b \ \forall n \Rightarrow \xi\leq b \end{array}\right)$$

Εφόσον η f είναι συνεχής στο ξ, από την αρχή της μεταφοράς προκύπτει $\boxed{f(x_{k_n})\to f(\xi)}$ (1)

Για κάθε $n\in\mathbb{N}$:

$$\underbrace{M-\frac{1}{n}}_{\downarrow\, M} \le M-\frac{1}{k_n} < f(x_{k_n}) \le \underbrace{M}_{\downarrow\, M}$$

Από θεώρημα ισοσυγκλινουσών ακολουθιών προκύπτει $\boxed{f(x_{k_n})\to M}$ (II)

Από (I) και (II) και μοναδικότητα ορίου ακολουθίας προκύπτει $M=f(\xi)$

Δείχνουμε ότι η f παίρνει ελάχιστη τιμή.

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής $\Rightarrow$ $-f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής $\Rightarrow$

Η $-f$ λαμβάνει μέγιστη τιμή $\Rightarrow$ Η f λαμβάνει ελάχιστη τιμή.

<u>Παρατήρηση:</u> Η υπόθεση ότι το πεδίο ορισμού είναι κλειστό διάστημα στο προηγούμενο θεώρημα δεν μπορεί να παραληφθεί.

Δεν ισχύουν τα προηγούμενα θεωρήματα για $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ συνεχής.

<u>Π.χ.</u> $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{1}{x}$: συνεχής όμως όχι φραγμένη.

<u>Λήμμα:</u> Έστω $f:A\to\mathbb{R}$ συνεχής, $x_0\in A$.

α) Αν $f(x_0)>0$ τότε υπάρχει $\delta>0$ ώστε $f(x)>\frac{f(x_0)}{2}\ (>0)$ $\forall x\in A\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)$.

β) Αν $f(x)<0$ τότε υπάρχει $\delta>0$ ώστε $f(x)<\frac{f(x_0)}{2}\ (<0)$ $\forall x\in A\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)$.

<u>Απόδειξη:</u>

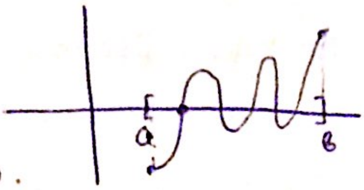
α) Εφαρμόζουμε τον ορισμό της συνέχειας για $\varepsilon=\frac{f(x_0)}{2}>0$

Υπάρχει $\delta>0$ ώστε για κάθε $x\in A\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)$ $(|x-x_0|<\delta)$ να ισχύει

$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon \iff -\frac{f(x_0)}{2}<f(x)-f(x_0)<\frac{f(x_0)}{2} \Rightarrow f(x)>\frac{f(x_0)}{2}$

β) ομοίως, εφαρμόζοντας τον ορισμό για $\varepsilon=-\frac{f(x_0)}{2}\ (>0)$.

<u>Θεώρημα Bolzano:</u>



Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής με $f(a)<0<f(b)$

[ή $f(b)<0<f(a)$] τότε υπάρχει $\xi\in(a,b)$ ώστε $f(\xi)=0$.

<u>Απόδειξη:</u> [Ιδέα: αναζητάμε τη μικρότερη λύση της εξίσωσης $f(y)=0$ στο (a,b).]

Ορίζουμε $A=\{x\in(a,b)$ για κάθε t με $a<t<x$ ισχύει $f(t)<0\}$.

<u>1º βήμα:</u> $A \neq \emptyset$

<u>Απόδειξη:</u> Εφόσον $f(a)<0$ $\exists \delta_1>0$ (με $\delta_1 < b-a$) ώστε $f(t)<0$ $\forall t \in [a, a+\delta_1)$

Για τυχόν x με $a<x<a+\delta_1$ προκύπτει ότι $x \in A$, άρα $A \neq \emptyset$ (με $(a, a+\delta_1) \subseteq A$).

<u>2º βήμα:</u> A άνω φραγμένο

<u>Απόδειξη:</u> Το b είναι άνω φράγμα του συνόλου.

Εφόσον $A \neq \emptyset$ και άνω φραγμένο έχει supremum. Θέτουμε $\xi = \sup A$.

Απομένει να δείξουμε ότι $\xi \in (a,b)$ και ότι $f(\xi)=0$.

<u>3º βήμα:</u> $a<\xi<b$

<u>Απόδειξη:</u> Εφόσον $(a, a+\delta_1) \subseteq A$ έχουμε $\xi = \sup A \geq a+\delta_1 > a \Rightarrow \xi > a$ (I)

Εφόσον $f(b)>0$ $\exists \delta_2>0$ ώστε $f(t)>0$ $\forall t \in (b-\delta_2, b]$ (II)

Το $b-\delta_2$ είναι άνω φράγμα του A. (Αν αυτό δε συνέβαινε θα υπήρχε $x \in A$ με $x > b-\delta_2$. Τότε, για t με $b-\delta_2<t<x$ ισχύει $f(t)<0$ (εφόσον $x \in A$) και $f(t)>0$ (από τη (II)). Άτοπο.)

Άρα, $\xi = \sup A \leq b-\delta_2 < b \Rightarrow \xi < b$ (III) (Από (I) και (III) $\Rightarrow a<\xi<b$)

<u>4º βήμα:</u> $f(\xi)=0$

<u>Απόδειξη:</u> Θα αποκλείσουμε τις περιπτώσεις $f(\xi)<0$ και $f(\xi)>0$ λόγω της συνέχειας της f στο ξ.

α) Υποθέτουμε ότι $f(\xi)<0$. Άρα, υπάρχει $\delta_3>0$ ώστε $f(t)<0$ $\forall t \in (\xi-\delta_3, \xi+\delta_3)$.

Τότε, προκύπτει ότι $f(t)<0$ $\forall t \in [a, \xi+\delta_3)$

Πράγματι, $\exists x \in A$ με $x > \xi-\delta_3 \Rightarrow f(t)<0$, $\forall t \in [a, x)$

Έτσι, προκύπτει $f(t)<0, \forall t \in \underbrace{[a,x) \cup (\xi-\delta_3, \xi+\delta_3)}_{[a, \xi+\delta_3)}$

Έτσι $\xi+\delta_3 \in A$, άτοπο διότι $\xi = \sup A$.

β) Υποθέτουμε ότι $f(\xi)>0$. Άρα, υπάρχει $\delta_4>0$ ώστε $f(t)>0$ $\forall t \in (\xi-\delta_4, \xi+\delta_4)$ (IV)

Επιλέγοντας $x \in A$ με $x>\xi-\delta_4$

Τότε, για t με $\xi-\delta_4<t<x$

έχουμε $f(t)>0$ από την (IV)

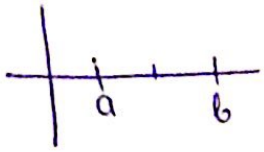
και $f(t)<0$ εφόσον $x \in A$. Άρα, άτοπο.

Επομένως, $f(\xi)=0$.

Απόδειξη 2: (Με ακολουθίες)

Υποθέτουμε ότι $f(x)\neq 0,\ \forall x\in(a,b)$, ώστε $f(x)\neq 0,\ \forall x\in[a,b]$

Θέτουμε $a_1=a$ και $b_1=b$



Εφόσον $f\left(\frac{a+b}{2}\right)\neq 0$, έχουμε 2 περιπτώσεις:

(i) Αν $f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$, θέτουμε $a_2=\frac{a+b}{2}$ και $b_2=b$ οπότε $f(a_2)<0<f(b_2)$

και $a_1\leq a_2<b_2\leq b_1$ και $b_2-a_2=\frac{b_1-a_1}{2}=\frac{b-a}{2}$

(ii) Αν $f\left(\frac{a+b}{2}\right)>0$, θέτουμε $a_2=a_1=a$ και $b_2=\frac{a+b}{2}$, τότε $f(a_2)<0<f(b_2)$ και

$a_1\leq a_2<b_2\leq b_1$, $b_2-a_2=\frac{b_1-a_1}{2}=\frac{b-a}{2}$.

Επαγωγικά μπορούμε να κατασκευάσουμε $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε:

(i) $a_1=a,\ b_1=b$

(ii) $a_n\leq a_{n+1}<b_n\leq b_{n+1}\quad \forall n\in\mathbb{N}$

(iii) $f(a_n)<0<f(b_n)$

(iv) $b_n-a_n=\frac{1}{2^{n-1}}$

Η (a_n) είναι αύξουσα και άνω φραγμένη από το b, άρα συγκλίνουσα.

Έστω $\xi=\lim a_n$. Τότε $\xi\in[a,b]$

$$b_n=\underbrace{(b_n-a_n)}_{\downarrow\ 0}+\underbrace{a_n}_{\downarrow\ \xi}\longrightarrow \xi$$

Έτσι, $\left.\begin{array}{l} a_n\to\xi \\ b_n\to\xi \end{array}\right\}\xRightarrow[\text{στο } \xi]{f \text{ συνεχής}}\begin{array}{l} f(a_n)\to f(\xi) \\ f(b_n)\to f(\xi) \end{array}$

Εφόσον $f(a_n)<0\ \forall n\in\mathbb{N}$ προκύπτει $f(\xi)\leq 0$

Εφόσον $f(b_n)>0\ \forall n\in\mathbb{N}$ προκύπτει $f(\xi)\geq 0$

$\Rightarrow$ Συνεπώς, προκύπτει $f(\xi)=0$.

Άτοπο [διότι $f(x)\neq 0,\ \forall x\in[a,b]$]

Επομένως $\exists\xi\in(a,b)$ ώστε $f(\xi)=0$.

Πόρισμα: (Θεώρημα Ενδιαμέσων τιμών.)

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής

a) Αν $f(a)<y<f(b)$ τότε $\exists\xi\in(a,b)$ ώστε $f(\xi)=y$.

b) Αν $f(b)<y<f(a)$ τότε $\exists\xi\in(a,b)$ ώστε $f(\xi)=y$.

Απόδειξη:

α) ορίζουμε $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ με $g(x)=f(x)-y$. Τότε, g συνεχής με $g(a)<0<g(b)$.

Άρα, από Θεώρημα Bolzano $\exists \xi\in(a,b)$ ώστε $g(\xi)=0 \Rightarrow f(\xi)=y$.

β) ορίζουμε $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ με $g(x)=y-f(x)$. Τότε, g συνεχής με $g(b)<0<g(a)$.

Άρα, από Θεώρημα Bolzano $\exists \xi\in(a,b)$ ώστε $g(\xi)=0 \Rightarrow f(\xi)=y$.

Πόρισμα: Από I διάστημα και $f:I\to\mathbb{R}$ συνεχής τότε $f(I)$ είναι διάστημα.

Απόδειξη: Αν f σταθερή ($f(x)=c$ $\forall x\in I$ τότε $f(I)=\{c\}$)

Αν η f όχι σταθερή και $y_1\neq y_2\in f(I)$

Τότε $y_1=f(a)$ και $y_2=f(b)$ για κάθε $a,b\in I$

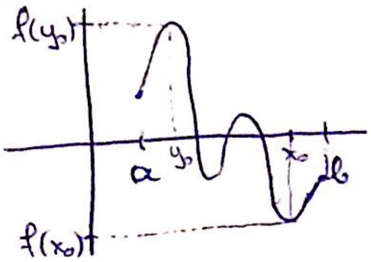
Αν $y_1<y<y_2$ ή $y_2<y<y_1$

Παρατήρηση: Αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής

Τότε, $f([a,b])$ διάστημα και επειδή η f παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

$\exists x_0,y_0\in[a,b]$ $f(x_0)\leq f(t)\leq f(y_0)$ $\forall t\in[a,b]$

Επομένως, $f([a,b])=[f(x_0),f(y_0)]$



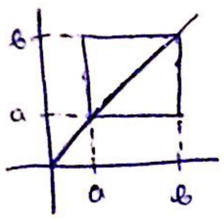
Παρατήρηση:

Έστω $f:[a,b]\to[a,b]$ συνεχής.

Τότε $\exists\xi\in[a,b]$ ώστε $f(\xi)=\xi$.

ξ σταθερό σημείο της f

Απόδειξη:



Αν $f(a)=a$ θέτω $\xi=a$

Διαφορετικά $f(a)>a$

Αν $f(b)=b$ θέτω $\xi=b$

Διαφορετικά $f(b)<b$

Αν $f(a)>a$ και $f(b)<b$ ορίζουμε $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ με $g(x)=f(x)-x$.

Η g συνεχής ως διαφορά συνεχών και $g(a)=f(a)-a>0$

$g(b)=f(b)-b<0$

$g(a)>0>g(b)$

Από το Θεώρημα Bolzano $\exists$ $\xi\in[a,b]$ ώστε $g(\xi)=0\Rightarrow f(\xi)=\xi$.